



TITLE:

# $E_n$ 型Chevalley群のUnipotent類 (有限群論)

AUTHOR(S):

水野, 賢三

---

CITATION:

水野, 賢三.  $E_n$ 型Chevalley群のUnipotent類 (有限群論). 数理解析研究所講究録 1979, 344: 67-79

ISSUE DATE:

1979-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104313>

RIGHT:

# $E_n$ 型 Chevalley 群の unipotent 類

高知学園短大 水野賢三

$E_n$  型シバリー群の unipotent 類を具体的に決めたので, その結果および計算方法を示す。  $G$  を代数閉体  $K$  上の単連結な  $E_n$  型 Chevalley 群とし,  $B$  をその 1 つの Borel 部分群,  $H$  を極大 Torus ( $\subseteq B$ ).  $U$  を maximal unipotent ( $\subseteq B$ ) とする。さらに,  $(B, T)$  に関する root 系を  $\Sigma$  と表わす。この時, 次のことが知られている。

補題 1.  $V$  を  $U$  の連結部分群で  $H$  不変なものとする。この時,  $G(V) = \{gxg^{-1} \mid x \in V, g \in G\}$  は Zariski closed となる。

そこで,  $\Sigma^+$  の ideals 間に同値関係と, 2 つの ideals  $I, J$  について  $I \sim J \stackrel{\text{def}}{\iff} G(U_I) = G(U_J)$  (但し  $U_I = \langle x_\alpha \mid \alpha \in I \rangle$ ) で定義する。補題 1 により,  $G(U_I)$  はある共役類の Zariski closure になっているから, 上記の同値類を調べることは, unipotent 類を決定する上で有用であるばかりでなく, その閉包の間の包

含関係を決める上でも役立つ。次に ideals の同値類を調べる方法を考える。  $W$  を  $\Sigma$  の Weyl 群,  $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m\} \in \Sigma^+$  の simple roots,  $\{w_1, \dots, w_m\}$  を simple reflections とする。今  $\Sigma^+$  の部分集合  $S$  が  $(r, s)$ -cube であるとは、次の 1) ~ 3) を満足することと定める。

1)  $S$  の中には、半順序 " $\leq$ " に関して最小のものが存在する。それを  $\alpha_0$  と書く。

2)  $r+s+1$  個の simple roots  $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s, \delta$  が存在して、 $\alpha_0 + \beta_1, \alpha_0 + \gamma_1, \alpha_0 + \delta, \beta_i + \beta_{i+1}, (i=1, 2, \dots, r-1), \gamma_j + \gamma_{j+1}$  ( $j=1, 2, \dots, s-1$ ) は全て  $\Sigma^+$  の元となる。

3)  $\tilde{\alpha}_0 = \alpha_0 + \delta + \sum_{i=1}^r \beta_i + \sum_{j=1}^s \gamma_j$  は、又、root となり、

$$S = \{ \alpha \in \Sigma^+ \mid \alpha_0 \leq \alpha \leq \tilde{\alpha}_0 \}$$

(但し、半順序 " $\leq$ " は  $\alpha \leq \beta \stackrel{\text{def}}{\iff} \beta - \alpha \in \sum_{i=1}^{\infty} (\mathbb{Z}^+ \cup \{0\}) \alpha_i$  で定める)

$(r, s)$ -cube  $S$  は定義より  $\alpha_0, \beta_i, \gamma_j, \delta$  で決まるから、

$S = \text{Cube}(\alpha_0; \beta_1, \dots, \beta_r; \gamma_1, \dots, \gamma_s; \delta)$  と書き  $\text{Side}(S) = \{\beta_1, \dots, \beta_r, \gamma_1, \dots, \gamma_s, \delta\}$

とおく。ideals の間には、次に示すいくつかの変形方法がある。

補題 2.  $I$  を  $\Sigma^+$  の ideal とする。ある  $\alpha_0 \in I$  と ある simple root  $\alpha_i$  について、

$I - \{\alpha_0\}$  ideal.  $w_i(\alpha_0) > \alpha_0$ ,

$I = w_i(I)$ ,  $I - \{\alpha_0, w_i(\alpha_0)\}$  ideal

ならば  $I \sim I - \{\alpha_0\}$ .

補題 3.  $I \in \Sigma^+$  の ideal とし,  $S = \text{Cube}(\alpha_0; \beta; \gamma; \delta) \subseteq I$  とする。もし  $I - S$  が ideal ならば,  $I = w_\beta(I) = w_\gamma(I)$  ならば  
 $I \sim I - \{\alpha_0, \alpha_0 + \delta\}$ 。

補題 4.  $I \in \Sigma^+$  の ideal とし,  $S = \text{Cube}(\alpha_0; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2; \delta)$  とする。もし,  $I - S$  が ideal ならば,  $S - I = \{\alpha_0, \alpha_0 + \beta_1, \alpha_0 + \gamma_1, \alpha_0 + \delta\}$  ならば,  
 $I = w_\delta(I) = w_{\beta_2}(I) = w_{\gamma_2}(I)$  ならば  $I \sim I - \{\alpha_0 + \beta_1 + \gamma_1\}$ 。

補題 5.  $I \in \Sigma^+$  の ideal とし,  $S = \text{Cube}(\alpha_0; \beta_1; \gamma_1, \gamma_2; \delta) \subseteq I$  とする。もしある root  $\varepsilon$  について, ある  $\alpha' \in \text{Side}(S)$  があり,

$w_{\alpha'}(\varepsilon) > \varepsilon$ ,  $I - \{\alpha'\}$  ideal,  $I - S$  ideal,  $\alpha' \neq \alpha_0$ ,

$I = w_{\alpha'}(I)$  for  $\forall \alpha \in \text{Side}(S)$

と仮定するならば  $I \sim I - \{\varepsilon, \alpha_0, \alpha_0 + \gamma_1, \alpha_0 + \delta, \alpha_0 + \beta_1\}$ 。

補題 6.  $I \in \Sigma^+$  の ideal とし,  $S \in I$  に含まれる  $\Sigma^+$  の (2,3)-cube とする。もし, ある root  $\varepsilon \in I$  について, ある  $\alpha' \in \text{Side}(S)$  があって,  $w_{\alpha'}(\varepsilon) > \varepsilon$ ,  $I - \{\varepsilon\}$  ideal,  $\varepsilon \neq \alpha_0$ ,

$I$ - $S$  ideal.  $I = u_{\alpha}(I)$ .  $\forall \alpha \in \text{Side}(S)$   $T_{\alpha} \in \mathcal{H}$ .

$$I \sim I - (\{\alpha \in S \mid \text{ht}(\alpha) \leq \text{ht}(\alpha_0) + 2\} \cup \{\varepsilon\})$$

と  $T_2 \geq 0$ 。但し、 $\alpha_0$  は  $S$  の 最小 の root と  $T_2$ 。

[illegible]

1-3-4-5-6-7-8      2 3 2.

そこで補題 2~7 を用いて共役類の代表元を求めていく方法  
と、2.3 の実例を示して述べる。

$$G = E_8 \text{ と } \sigma \text{ 2.}$$

が 1 段階  $I = \Sigma^+$  とおく。  $G(U_I)$  の中で open になっている  
 共役類  $C_1$  を求める (この場合は regular unipotent 全体)。

オ2段階  $U_I$  の元で  $G_1$  に入らない元を調べる。(この場合

$$x = \prod x_{\alpha}(t_{\alpha}) \quad \text{と表わすと} \quad x \neq \text{regular} \Leftrightarrow t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} \cdots t_{\alpha_8} = 0.)$$

第3段階:  $G(U_I) = C_1 \cup G(U_{J_1}) \cup \dots \cup G(U_{J_r})$ . ( $G(U_I) \neq G(U_{J_i})$ )

と仮定する  $J_1, \dots, J_r \in \mathcal{I}$  を求める (この場合  $J_i = I - \{\alpha_i\}$ ).

お4段階. 補題2~7を用いて  $G(U_{J_1}), \dots, G(U_{J_r})$  の中で極大なるものを求めよ. (この場合は補題2により,  $J_i \sim I - \{\alpha_3, \alpha_4\}$ )

再び

オ 1' 段階  $I = \Sigma^+ - \{\alpha_3, \alpha_4\}$  とおき  $G(U_I)$  の中で open になっている共役類  $C_2$  を求める (この場合は *subregular class*)

オ 2' 段階  $U_I$  の元で  $C_2$  に入らないものを調べる。(この場合  $x = \prod x_\alpha(t_\alpha) (\in U_I)$  と表わすと  $x \neq \text{subregular} \Rightarrow t_{\alpha_1} t_{\alpha_2} t_{\alpha_3+\alpha_4} t_{\alpha_5} t_{\alpha_6} t_{\alpha_7} \times t_{\alpha_8} (t_{\alpha_5} t_{\alpha_2+\alpha_4} + t_{\alpha_2} t_{\alpha_4+\alpha_5}) = 0$ )

オ 3' 段階  $G(U_I) = C_2 \cup G(U_{J_1}) \cup \dots \cup G(U_{J_r})$  とおき  $J_1, \dots, J_r$  を求める。(この場合  $J_1 = I(\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$  ( $\alpha_1, \alpha_3, \dots, \alpha_8$  による  $T$ : ideal の意味)  $J_2 = I(\alpha_1+\alpha_3, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$ ,  $J_3 = I(\alpha_1, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_2+\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$ ,  $J_4 = I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$ ,  $J_5 = I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_4+\alpha_5, \alpha_6, \alpha_7, \alpha_8)$ ,  $J_6 = I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_5, \alpha_7, \alpha_8)$ ,  $J_7 = I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_8)$ ,  $J_8 = I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3+\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$ )).

オ 4' 段階 補題 2~7 を用いて  $G(U_{J_1}), \dots, G(U_{J_r})$  の中で極大なものを見つける。(この場合  $J = I(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4+\alpha_5, \alpha_5+\alpha_6, \alpha_6+\alpha_7, \alpha_8)$  とおくと  $G(U_J)$  が最大).

オ 5' 段階  $C_2$  の代表元を 1 つ取り, その中心化群の構造を求める.  $G(U_J) \subsetneq G(U_I)$  を調べる.

以下同様にして調べていくことによって, 共役類の代表元を求めることができる. この代表元の中に重複がないかを調べるには中心化群の構造が異なることを示せば十分であるが, 中心化群の構造を求めるために, 選り出された各代表元  $x$  に

ついで、下記(1)~(4)の性質をもつ4つの  $G$  の部分群  $P, R, V, V_1$  を見出すことを考える。

- 1)  $P \cong B, R, V, V_1 (\subseteq U) : P$  の normal subgroup.
- 2)  $x \in V, R \subseteq R_u(P), V_1 \supseteq D(V).$
- 3)  $R(x) = x V_1.$
- 4)  $(P/R, V/V_1) : \text{prehomogeneous space, } P(x)/V_1 \text{ は open-orbit.}$

(但し、標数が bad の時にはいくつかの代表元については、直接計算で求めた)。

以上の方法で得られた結果を記す。標数が大であれば、ユニポテント類の分類および中心化群の連結成分の構造は、Elkington の結果があるので、ここでもその結果に合わせて書くことにする。代表元として  $x_{\alpha}(1)$  なるもののいくつかの積で表わせるものが取れるが、しかし、2つの形の異なる元が標数が小さい時には共役でなくとも、標数が大であれば共役となる場合がある。そのような時には、中心化群の次元が標数に無関係になるものを(標数が大なる時に対応する)正則部分代数の形で表わし、標数  $p$  で次元が小さくなるものを添字  $p$  を付けて表わすこととする。以下の表では、この型を第1列に記し、第2列には、中心化群のその連結成分による剰余群

の構造を、オ3列には、中心化群の連結成分の Reductive part ( $= Z_G(x)^\circ / R_u(Z_G(x)^\circ)$ ) の型、オ4列には中心化群の根基の次元を記す。

$E_7$  のユニポテント類 (単連結の場合)

$E_7$	$Z_{2(6,p)}$	0	7
$E_7(a_1)$	$Z_2$	0	9
$E_7(a_2)$	$Z_2$	0	11
$D_6 + A_1$	$Z_2 \times Z_{(2,p-1)}$	0	13
$E_6$	$Z_{(6,p)}$	$A_1$	10
$E_6(a_1)$	$Z_2$	$T_1$	14
$D_6$	$Z_2$	$A_1$	12
$D_6(a_1) + A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	0	17
$A_6$	$Z_{(2,p)}$	$\begin{cases} T_1 & (p=2) \\ A_1 & (p \neq 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 18 & (p=2) \\ 16 & (p \neq 2) \end{cases}$
$D_6(a_1)$	$Z_2$	$A_1$	16
$D_5 + A_1$	$Z_2$	$A_1$	16
$D_6(a_2) + A_1$	$S_3 \times Z_{(2,p-1)}$	0	21
$D_5$	$Z_{(2,p)}$	$2A_1$	15
$(A_5 + A_1)'$	$Z_2$	$A_1$	20
$(A_5 + A_1)''$	$Z_{(2,p-1)}$	$A_1$	22



$D_6(a_2)$	$Z_{(2,p-1)}$	$A_1$	20
$A_5'$	1	$2A_1$	19
$D_5(a_1)+A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	$A_1$	22
$A_5''$	$Z_{(2,p-1)}$	$G_2$	17
$A_4+A_2$	1	$A_1$	24
$D_5(a_1)$	$Z_2$	$T_1+A_1$	23
$A_4$	$Z_2$	$T_1+A_2$	24
$A_4+A_1$	$Z_2$	$2T_1$	27
$D_4+A_1$	$Z_2$	$B_2$	21
$A_3+A_2+A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	$A_1$	30
$A_3+A_2$	$Z_{(2,p-1)}$	$\begin{cases} T_1+A_1 & (p \neq 2) \\ A_1 & (p=2) \end{cases}$	$\begin{matrix} 31 & (p \neq 2) \\ 32 & (p=2) \end{matrix}$
$(A_3+A_2)_2$	1	$2A_1$	31
$D_4$	$Z_{(2,p)}$	$C_3$	16
$D_4(a_1)+A_1$	$Z_2 \wedge Z_{(2,p-1)}$	$2A_1$	31
$D_4(a_1)$	$S_3$	$3A_1$	30
$A_3+2A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	$2A_1$	33
$(A_3+A_1)'$	1	$3A_1$	32
$(A_3+A_1)''$	$Z_{(2,p-1)}$	$B_3$	26
$A_3$	1	$A_1+B_3$	25
$2A_2+A_1$	1	$2A_1$	37

$2A_2$	1	$A_1 + G_2$	32
$A_2 + 3A_1$	$Z_{(2, p-1)}$	$G_2$	35
$A_2 + 2A_1$	1	$3A_1$	42
$A_2 + A_1$	$Z_2$	$T_1 + A_3$	41
$A_2$	$Z_2$	$A_5$	32
$4A_1$	$Z_{(2, p-1)}$	$C_3$	42
$(3A_1)'$	1	$A_1 + C_3$	45
$(3A_1)''$	$Z_{(2, p-1)}$	$F_4$	27
$2A_1$	1	$A_1 + B_4$	42
$A_1$	1	$D_6$	33
$\phi$	1	$E_7$	0

$E_8$  の  $\perp$  = ポテンシャル類

$E_8$	$Z_{(60, p^2)}$	0	8
$E_8(a_1)$	$Z_{(12, p^2)}$	0	10
$E_8(a_2)$	$Z_{(4, p^2)}$	0	12
$E_7 + A_1$	$Z_2 \times Z_{(6, p)}$	0	14
$E_7$	$Z_{(12, p^2)}$	$A_1$	13
$D_8$	$Z_2$	0	16
$E_7(a_1) + A_1$	$Z_2$	0	18
$E_7(a_1)$	$Z_{(2, p)}$	$A_1$	17

$D_8(a_1)$	$\begin{cases} Z_2 & (p \neq 2) \\ D_8 & (p = 2) \end{cases}$	0	20
$E_7(a_2) + A_1$	$S_3 \times Z_{(2,p)}$	0	22
$D_7$	$Z_{(2,p)}$	$A_1$	19
$E_7(a_2)$	$Z_{(2,p)}$	$A_1$	21
$A_8$	$S_3$	0	24
$E_6 + A_1$	$Z_{(6,p)}$	$A_1$	23
$D_7(a_1)$	$\begin{cases} Z_2 & (p \neq 2) \\ 1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} T_1 & (p \neq 2) \\ 0 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 25 & (p \neq 2) \\ 26 & (p = 2) \end{cases}$
$(D_7(a_1))_2$	$Z_2 \quad (p = 2)$	$A_1 \quad (p = 2)$	25 $(p = 2)$
$E_6$	$Z_{(6,p)}$	$G_2$	18
$D_8(a_3)$	$\begin{cases} S_3 & (p \neq 3) \\ Z_2 & (p = 3) \end{cases}$	0	28
$D_6 + A_1$	$Z_2$	$A_1$	25
$A_7$	1	$\begin{cases} A_1 & (p \neq 3) \\ 0 & (p = 3) \end{cases}$	$\begin{cases} 27 & (p \neq 3) \\ 30 & (p = 3) \end{cases}$
$(A_7)_3$	1 $(p = 3)$	$A_1 \quad (p = 3)$	29 $(p = 3)$
$E_6(a_1) + A_1$	$Z_2$	$T_1$	29
$D_6$	$Z_{(2,p)}$	$B_2$	22
$D_7(a_2)$	$Z_2$	$T_1$	31
$E_6(a_1)$	$Z_2$	$A_2$	26

$D_5 + A_2$	$\begin{cases} Z_2 & (p \neq 2) \\ 1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} T_1 & (p \neq 2) \\ 0 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 33 & (p \neq 2) \\ 34 & (p = 2) \end{cases}$
$(D_5 + A_2)_2$	$Z_2 \quad (p = 2)$	$A_1 \quad (p = 2)$	$33 \quad (p = 2)$
$A_6 + A_1$	$1$	$A_1$	$33$
$D_6(a_1) + A_1$	$Z_{(2,p-1)}$	$A_1$	$33$
$D_6(a_1)$	$Z_2 \times Z_{(2,p)}$	$2A_1$	$32$
$A_6$	$Z_{(2,p)}$	$\begin{cases} 2A_1 & (p \neq 2) \\ T_1 + A_1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 32 & (p \neq 2) \\ 34 & (p = 2) \end{cases}$
$D_5 + A_1$	$Z_{(2,p)}$	$2A_1$	$34$
$2A_4$	$S_5$	$0$	$40$
$A_5 + A_2$	$S_3$	$A_1$	$39$
$A_5 + 2A_1$	$Z_2$	$A_1$	$41$
$D_6(a_2)$	$Z_2$	$2A_1$	$38$
$D_5$	$Z_{(2,p)}$	$B_3$	$27$
$D_5(a_1) + A_2$	$1$	$A_1$	$43$
$(A_5 + A_1)'$	$1$	$2A_1$	$40$
$(A_5 + A_1)''$	$Z_2$	$G_2$	$36$
$D_4 + A_2$	$Z_2$	$\begin{cases} A_2 & (p \neq 2) \\ A_1 & (p = 2) \end{cases}$	$\begin{cases} 42 & (p \neq 2) \\ 47 & (p = 2) \end{cases}$
$(D_4 + A_2)_2$	$Z_2 \quad (p = 2)$	$G_2 \quad (p = 2)$	$42 \quad (p = 2)$
$A_4 + A_3$	$1$	$A_1$	$45$

$A_5$	1	$A_1 + G_2$	35
$D_5(a_1) + A_1$	1	$2A_1$	46
$A_4 + A_2 + A_1$	1	$A_1$	49
$A_4 + A_2$	1	$2A_1$	48
$D_5(a_1)$	$Z_2$	$A_3$	43
$D_4 + A_1$	$Z_{(2,p)}$	$C_3$	43
$A_4 + 2A_1$	$Z_2$	$T_1 + A_1$	52
$D_4$	$Z_{(2,p)}$	$F_4$	28
$A_4 + A_1$	$Z_2$	$T_1 + A_2$	51
$2A_3$	1	$B_2$	50
$A_4$	$Z_2$	$A_4$	44
$D_4(a_1) + A_2$	$Z_2$	$A_2$	56
$A_3 + A_2 + A_1$	1	$2A_1$	60
$A_3 + A_2$	$Z_{(2,p-1)}$	$\begin{cases} T_1 + B_2 & (p \neq 2) \\ B_2 & (p = 2) \end{cases} \begin{cases} 59 & (p \neq 2) \\ 60 & (p = 2) \end{cases}$	
$(A_3 + A_2)_2$	1 ( $p=2$ )	$A_1 + B_2$ ( $p=2$ )	59 ( $p=2$ )
$D_4(a_1) + A_1$	$S_3$	$3A_1$	63
$A_3 + 2A_1$	1	$A_1 + B_2$	63
$D_4(a_1)$	$S_3$	$D_4$	54
$2A_2 + 2A_1$	1	$B_2$	70
$A_3 + A_1$	1	$A_1 + B_3$	60

$2A_2 + A_1$	1	$A_1 + G_2$	69
$A_3$	1	$B_5$	45
$2A_2$	$Z_2$	$2G_2$	64
$A_2 + 3A_1$	1	$A_1 + G_2$	77
$A_2 + 2A_1$	1	$A_1 + B_3$	78
$A_2 + A_1$	$Z_2$	$A_5$	77
$4A_1$	1	$C_4$	84
$A_2$	$Z_2$	$E_6$	56
$3A_1$	1	$A_1 + F_4$	81
$2A_1$	1	$B_6$	78
$A_1$	1	$E_7$	57
$\phi$	1	$E_8$	0

但し、 $T_1$  は 1次元 torus とする。